20/10/2015

Πόρισμα: Οι μόνες καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα είναι ευθείες ($k=0$) ή κύκλος ($k\neq 0$) (ή τμήματα αυτού)

→ Ποιες είναι οι καμπύλες με καμπυλότητα $k(s)=s$??

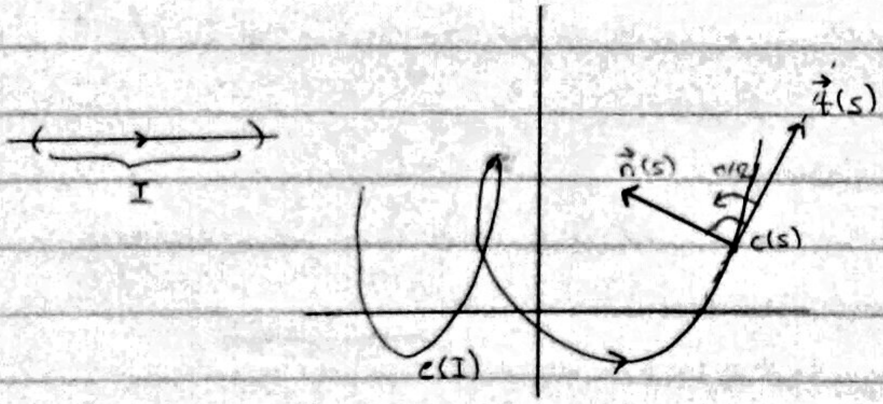
$$\varphi(s)=\int_{s_0=0}^{s} k(\sigma)\,d\sigma=\int_0^s \sigma\, d\sigma=\frac{1}{2}s^2$$

$$\dot c(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))=\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}s^2\right),\sin\left(\tfrac{1}{2}s^2\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(s)=\left(\int_0^s \cos\left(\tfrac{1}{2}s^2\right)d\sigma,\ \int_0^s \sin\left(\tfrac{1}{2}s^2\right)d\sigma\right)$$

Πλαίσιο Frenet:

$c: I\to\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο $c(s)=(x(s),y(s))$



Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι:

$\vec t(s)=\dot c(s)=(\dot x(s),\dot y(s))=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))$,

$k=\dfrac{d\varphi}{d\sigma}$

$J=R_{\pi/2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \quad J(v_1,v_2)=(-v_2,v_1)$

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι $\vec n(s)=J\vec t(s)$

Προφανώς $\{\vec t(s)\ \vec n(s)\}$ είναι δεξιόστροφη ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^2$ την οποία καλούμε πλαίσιο Frenet.

→ Πως μεταβάλλεται το πλαίσιο Frenet??

$$\vec t(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))\Rightarrow\dot{\vec t}\ (-\dot\varphi\sin\varphi,\dot\varphi\cos\varphi)=\dot\varphi(-\sin\varphi,\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow\boxed{\dot{\vec t}=k\vec n}$$

$$\langle\vec t,\vec t\rangle=1\Rightarrow\langle\vec t,\vec t\rangle^{\cdot}=0\Rightarrow 2\langle\vec t,\dot{\vec t}\rangle=0\Rightarrow\dot{\vec t}\perp t\Rightarrow\dot{\vec t}\parallel\vec n$$

$\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \Rightarrow \dot{\vec{n}} = (-\dot{\varphi}\cos\varphi, -\dot{\varphi}\sin\varphi) = -\dot{\varphi}(\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow$

$\boxed{\dot{\vec{t}} = k\vec{n}}$
$\boxed{\dot{\vec{n}} = -k\vec{t}}$ → Εξισώσεις Frenet

Πλαίσιο Frenet για καμπύλες με τυχαία παράμετρο:

$c(t)$ $\quad \vec{t} = \dot{c} = \dfrac{dc}{ds} = \dfrac{dc}{dt}\dfrac{dt}{ds} \Rightarrow \vec{t} = \dfrac{dt}{ds}c' \Rightarrow \vec{t} = \dfrac{c'}{\|c'\|}$ *

$* \left(s = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma \quad \dfrac{ds}{dt} = \|c'\| \Rightarrow \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\|c'\|} \right)$

$\vec{n} = J\vec{t} = \dfrac{Jc'}{\|c'\|}$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
$c(t) = (e^t\cos t, e^t \sin t)$
(i) είναι κανονική;
(ii) Να βρεθεί το μήκος τόξου και να γίνει αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου.
(iii) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα ως συνάρτηση του t και του s.
iv) Έχει αυτοτομές;
v) Το σύνολο των εφαπτομένων καμπυλών το $\mathbb{R}^2$;

Λύση:

i) Η c είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας
$c'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$
$\|c'(t)\| = e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} = e^t\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \|c'(t)\| = \sqrt{2}e^t > 0. \Rightarrow$ Η c είναι κανονική.

ii) $s = s(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{2}.e^\sigma d\sigma = \sqrt{2}(e^t - 1) \Rightarrow \boxed{s = s(t) = \sqrt{2}(e^t - 1)}$

Αναπαραμέτρηση: $s = \sqrt{2}(e^t - 1) \Leftrightarrow e^t - 1 = \dfrac{s}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^t = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \quad s > -\sqrt{2}$

Άρα η αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου είναι:

$$c(s)=\left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right),\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)$$

(iii) Η καμπυλότητα του $c(t)=(x(t),y(t))=(e^t\cos t, e^t\sin t)$ είναι η συνάρτηση $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}=\ldots=\frac{1}{\sqrt{2}\,e^t}$$

$$k(s)=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)} \Rightarrow k(s)=\frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

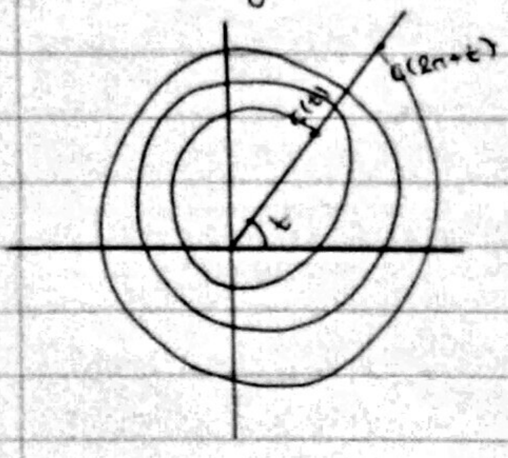
→ Να βρεθεί το πλαίσιο Frenet

$$\vec{t}(t)=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t,\cos t+\sin t)$$

$$\vec{n}(t)=J\vec{t}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t-\sin t,\cos t-\sin t).$$

(iv) $d(0,c(t))=\|c(t)\|=e^t$

Όσο μεγαλώνει το t μεγαλώνει και η απόσταση



$c(t_1)=c(t_2) \Rightarrow \|c(t_1)\|=\|c(t_2)\| \Rightarrow$

$e^{t_1}=e^{t_2} \Rightarrow t_1=t_2$

Είναι "1-1" Άρα δεν τέμνει τον εαυτό της.

v) Η εφαπτόμενη της c στο t_0 είναι η ευθεία (ε): $p=c(t_0)+\lambda c'(t_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

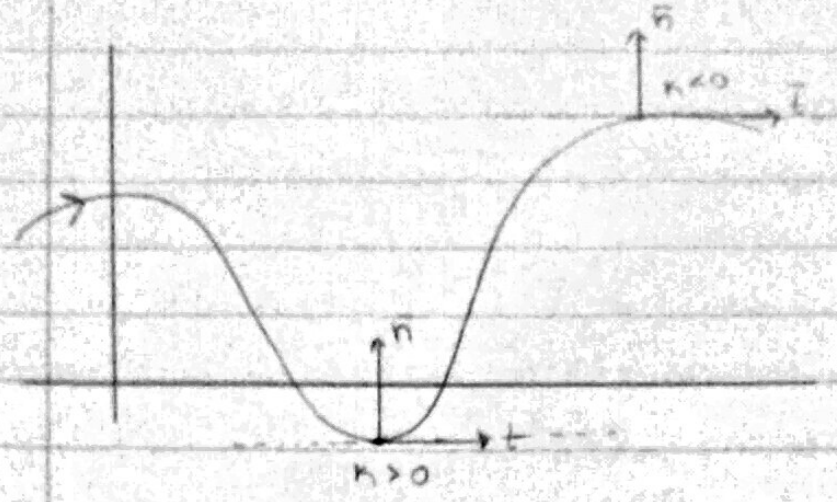
Η (ε) διέρχεται από το $(0,0) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}$ $0=c(t_0)+\lambda c'(t_0) \Leftrightarrow$

$c(t_0)$, $c'(t_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

$c(t_0)=e^{t_0}(\cos t_0,\sin t_0)$

$c'(t_0)=e^{t_0}(\cos t_0-\sin t_0,\cos t_0+\sin t_0)$.

Παίρνω ορίζουσα για να δω αν είναι γρ. εξαρτ.



Οταν το $\vec{n}$ βρισκεται στο ημιεπιπεδο
που βρισκεται η καμπυλη, τοτε $\kappa > 0$

Παραδειγμα: Να βρεθει καμπυλη $c(s)$ με φυσική παράμετρο
τετοια ωστε: (i) $c(0) = (0,0)$

(ii) $\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(iii) Η καμπυλοτητα ειναι: $\kappa(s) = \frac{1}{3}$

Λυση

Ειναι $c(s) = (x(s), y(s))$,

$$t(s) = \dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)).$$

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{ds}(s) = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^s \frac{d\varphi}{ds}\, ds = \frac{1}{3}s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(s) - \varphi(0) = \frac{1}{3}s$$

$$\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi(0) = \pi/4}$$

$$\boxed{\varphi(s) = \frac{1}{3}s + \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \dot{c}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^s \dot{c}(s)\,ds = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right)ds, \int_0^s \sin\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right)ds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(s) - \cancel{c(0)}^{\,0} = \Bigg(\underbrace{3\left(\sin\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{x}, \underbrace{-3\left(\cos\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{y}\Bigg)$$

$(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 = \rho$ κυκλος

(Το καταλαβαινουμε και απο το γεγονος οτι η καμπυλότητα ειναι σταθερη).

παραδειγμα: Μια καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο έχει κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s)$.
Να βρεθεί η καμπύλη.

Λύση:

Ισχύει $\vec{n} = J\vec{t}$ και $J^2 = J \circ J = -Id$

$\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s) \Rightarrow J\vec{n}(s) = J(-\sin s, \cos s) \Rightarrow$

$\Rightarrow J(J\vec{t}(s)) = (-\cos s, -\sin s) \Rightarrow -\vec{t}(s) = (-\cos s, -\sin s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{t}(s) = (\cos s, \sin s) \Rightarrow \dot{c}(s) = (\cos s, \sin s) \Rightarrow \int_0^s \dot{c}(\sigma)d\sigma =$

$$= \left(\int_0^s \cos\sigma d\sigma, \int_0^s \sin\sigma d\sigma\right)$$

$\Rightarrow c(s) - c(0) = (\sin s - \cos s + 1) \Rightarrow c(s) = c(0) + (\sin s, -\cos s + 1)$

Εστω $c(0) = (x_0, y_0)$, τοτε:

$c(s) = (\underbrace{\sin s + x_0}_{x}, \underbrace{-\cos s + 1 + y_0}_{y})$

$$\left.\begin{array}{l} x = \sin s + x_0 \\ y = -\cos s + 1 + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - x_0 = \sin s \\ y - (y_0 + 1) = \cos s \end{array}\right\} \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - (y_0 + 1))^2 = 1$$

$\dot{\vec{t}} = k\vec{n} \Leftrightarrow (-\sin s, \cos s) = k(-\sin s, \cos s) \Rightarrow k = 1$

παραδειγμα: Να βρεθουν όλες οι κανονικες καμπύλες των οποιων όλες οι καθετες ευθειες να διερχονται απο το ιδιο σημειο.

Λυση

Εστω $c(s)$ καμπύλη, s = μηκος τοξου με την ιδιοτητα όλες οι καθετες να διερχονται απο το p_0.

Η καθετη ευθεια της c στο s ειναι η ευθεια:

$p = c(s) + \lambda\vec{n}(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Υπαρχει $\lambda = \lambda(s)$ ώστε $\boxed{p_0 = c(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) \ \forall s}$ *

$\Rightarrow \langle p_0, \vec{n}(s)\rangle = \langle c(s), \vec{n}(s)\rangle + \lambda(s) \Rightarrow \lambda(s)$ ειναι λεια

Παραγωγιζω την (*) $0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = \dot{\vec{t}}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) - \lambda(s)k(s)\vec{t}(s) \Leftrightarrow \boxed{0 = (1-\lambda(s)k(s))\vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)n(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = \lambda_0 = \text{σταθ} \\ 1-\lambda(s)k(s) = 0 \Rightarrow k(s) = \frac{1}{\lambda_0} \end{cases}$$

Άρα κυκλος με κεντρο το p_0 και ακτινα το λ_0.